ZESTAW II

1. (A) Pokazać, że przestrzenie metryczne $(\mathbb{R}^2, d_k)$ i $(\mathbb{R}^2, d_r)$ z Zestawu I, zad. 2 są zupełne.

(B) Czy przestrzeń (X,d) określona w Zestawie I, zad. 8 jest zupełna?

(C) W zbiorze $C[0,1]$ funkcji ciągłych $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ określmy metrykę formułą $d(f,g)=\int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt$. Pokazać, że przestrzeń $(C[0,1], d)$ nie jest zupełna.

2. Niech H będzie przestrzenią homeomorfizmów $h:[0,1]\to[0,1]$, $h(0)=0$, $h(1)=1$, z metryką $d_{sup}(h_1,h_2)=\sup\{|h_1(t)-h_2(t)| : t\in[0,1]\}$,

(A) Pokazać, że przestrzeń metryczna (H, d_{sup}) nie jest zupełna.

(B) Niech $d(h_1,h_2)=d_{sup}(h_1,h_2)+d_{sup}(h_1^{-1},h_2^{-1})$. Pokazać, że przestrzeń (H,d) jest zupełna i $\mathcal{T}(d)=\mathcal{T}(d_{sup})$.

(C) Pokazać, że nie istnieje metryka prawo-niezmiennicza e na H taka, że $\mathcal{T}(d_{sup})=\mathcal{T}(e)$ i przestrzeń metryczna (H,e) jest zupełna.

<u>Wskazówka</u>. Pokazać, że istnienie metryki e przeczyłoby (A).

3. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, $Y\subset X$ i $d_Y = d|Y\times Y$.

(A) Pokazać, że jeśli przestrzeń (Y,d_Y) jest zupełna to zbiór Y jest domknięty w przestrzeni (X,d).

(B) Pokazać, że jeśli przestrzeń (X,d) jest zupełna i Y jest zbiorem domkniętym w (X,d), to przestrzeń (Y,d_Y) jest zupełna.

4. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy $p\in X$ i niech, dla $a\in X$, funkcja $f_a : X\to\mathbb{R}$ będzie określona formułą $f_a(x) = d(x,a) - d(x,p)$.

Pokazać, że $f_a \in C_b(X,\mathbb{R})$ oraz $d(a,b) = d_{sup}(f_a, f_b)$, dla $a,b\in X$.

---

5. Uzupełnieniem przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy zupełną przestrzeń metryczną (Z,e) wraz z przekształceniem $\varphi : X\to Z$ takim, że $e(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y)$ i $\overline{\varphi(X)} = Z$.

(A) Pokazać, że każda przestrzeń metryczna ma uzupełnienie.

<u>Wskazówka</u>. Skorzystać z zadań 4 i 3.

(B) Pokazać, że jeśli (Z_i, e_i), $\varphi_i : X\to Z_i$, $i=1,2$, są uzupełnieniami przestrzeni metrycznej (X,d), to istnieje izometria $\psi : Z_1\to Z_2$ (tzn. $e_2(\psi(z_1),\psi(z_2)) = e_1(z_1,z_2)$, $\psi(Z_1)=Z_2$) taka, że $\psi\circ e_1 = e_2$.

(C) Niech (Z,e), $\psi : C[0,1]\to Z$ będzie uzupełnieniem przestrzeni metrycznej $(C[0,1], d)$ opisanej w zad. 1(C). Pokazać, że istnieje funkcja ciągła $\Phi : Z\to\mathbb{R}$ taka, że $\Phi(\psi(f)) = \int_0^1 f(t)\,dt$, dla $f\in C[0,1]$.

<u>Wskazówka</u> Skorzystać z faktu, że $\left|\int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt\right| \le d(f,g)$.

---

6. Niech (X_i, d_i), $i=1,2,\ldots$ będą zupełnymi przestrzeniami metrycznymi

(A) Niech $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \times \{i\}$ i niech metryka d na $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$ będzie określona formułą

$$d((x,i),(y,j)) = \begin{cases} \frac{1}{i}\,\frac{d_i(x,y)}{1+d_i(x,y)}, & \text{jeśli } i=j, \\ 1, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Pokazać, że przestrzeń $(\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i, d)$ jest zupełna.

(B) Niech e będzie metryką w iloczynie kartezjańskim $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ określoną formułą

$$e(x,y) = \sup_i \left(\frac{1}{i}\,\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} \right), \quad x=(x_1,x_2,\ldots),\ y=(y_1,y_2,\ldots).$$

Pokazać, że przestrzeń metryczna $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, e)$ jest zupełna i $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}_{\Pi}$ jest topologią iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $(X_i, \mathcal{T}(d_i))$.

Wskazówka. Rozpatrzyć funkcję $\varphi : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to C_b(\mathbb{N}, \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i)$, $\varphi(x)(i) = x_i$, $x=(x_1,x_2,\ldots)$ i skorzystać z (A).

7. Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną, $B = B(x_0,r)$ kulą w X i niech $T : B \to B$ spełnia warunek $d(T(x),T(y)) \leqslant \frac{1}{2} d(x,y)$, dla $x,y \in B$. Pokazać, że jeśli $d(T(x_0),x_0) < \frac{r}{2}$, to istnieje $u \in B$ takie, że $T(u) = u$.
Wskazówka. Dla $D = \{x \in X : d(x,x_0) \leqslant 2d(T(x_0),x_0)\} \subset B$ pokazać, że $T(D) \subset D$.

8. Niech (X,d) będzie przestrzenią zupełną i niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem rozszerzającym, tzn. dla pewnego $e > 1$, $d(T(x),T(y)) \geqslant e \cdot d(x,y)$. Wykazać, że jeśli $T(X) = X$, to T ma dokładnie jeden punkt stały.

9. Niech $(C[0,1], d_{sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z metryką supremum, niech $M = \{f \in C[0,1] : 0 = f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1) = 1,\ \text{dla } t \in [0,1]\}$. Pokazać, że przestrzeń (M, d_{sup}), z metryką d_{sup} obciętą do M, jest zupełna, oraz przekształcenie $T : M \to M$ określone formułą $T(f)(t) = t \cdot f(t)$ spełnia warunek $d_{sup}(T(f),T(g)) < d_{sup}(f,g)$, dla $f \neq g$, ale T nie ma punktów stałych.

10 Niech K będzie domkniętym, wypukłym i ograniczonym zbiorem w przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$ zawierającym funkcję tożsamościowo równą zeru. Wykazać, że jeśli $T : K \to K$ spełnia warunek $d_{sup}(T(f), T(g)) < d_{sup}(f, g)$ dla $f, g \in C[0,1]$, to $\inf\{d_{sup}(f, T(f)) : f \in K\} = 0$.

Wskazówka. Zauważyć, że dla $c \in (0,1)$ przekształcenie $T_c : K \to K$ określone formułą $T_c(f) = c\,T(f)$ jest zwężające i punkt stały f_c dla T_c spełnia warunek $d_{sup}(f_c, T(f_c)) \leqslant (1-c)\mathrm{diam}K$.

11 Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem przeliczalnym w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ i niech $F_k \subset \mathbb{R}$ będą zbiorami domkniętymi, brzegowymi na prostej euklidesowej. Wykazać, że istnieje punkt $c \in \mathbb{R}^n$ taki, że dla każdego $a \in A$, $d_e(c, a) \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

12 Niech $F \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym, brzegowym na prostej euklidesowej. Pokazać, że istnieje punkt (a, b) na okręgu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ taki, że dla każdej liczby wymiernej q i $c \in F$, $b \neq qa + c$.

13 (A) Niech K będzie podzbiorem domkniętym o pustym wnętrzu na prostej euklidesowej. Wykazać, że istnieje liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że zbiór $\{t + x : x \in K\}$ jest zawarty w zbiorze liczb niewymiernych.

(B) Niech $\{F_1, F_2, \ldots\}$ będą zbiorami domkniętymi o pustym wnętrzu na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ i niech zbiór $A \subset \mathbb{R}$ będzie przeliczalny. Wykazać, że istnieje liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że zbiór $\bigcup_i F_i$ jest rozłączny ze zbiorem $\{t + a : a \in A\}$

14 Niech F będzie zbiorem domkniętym o pustym wnętrzu na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$. Wykazać, że istnieją zbiory gęste A, B na prostej euklidesowej takie, że $(A \times B) \cap F = \emptyset$.

Wskazówka. Dla każdej pary liczb wymiernych $a < b$ wykazać, że zbiór $K(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \{x\} \times [a,b] \subset F\}$ jest domknięty, brzegowy i wybrać przeliczalny zbiór A gęsty w $\mathbb{R}$, rozłączny z każdym takim zbiorem $K(a,b)$. Następnie wybrać przeliczalny zbiór B gęsty w $\mathbb{R}$, rozłączny z każdym zbiorem $\{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in F\}$, gdzie $a \in A$.

15 Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych określonych na zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) zbieżnym punktowo do $f : X \to \mathbb{R}$, tzn. $f_n(x) \to f(x)$ dla $x \in X$.

(A) Wykazać, że dla $a < b$ zbiór $f^{-1}((a,b)) \setminus \mathrm{Int} f^{-1}((a,b))$ jest sumą przeliczalnie wielu domkniętych zbiorów brzegowych.

Wskazówka. Sprawdzić, że $f^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n,m} \bigcap_{k \geqslant m} f_k^{-1}([a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}])$, a więc $f^{-1}((a,b))$ jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych.

(B) Wykazać, że zbiór punktów ciągłości funkcji f jest gęsty w przestrzeni (X, d) (twierdzenie Baire'a).

Wskazówka. Wyrzucić z X, dla wszystkich par liczb wymiernych $a < b$, zbiory brzegowe opisane w (A).

(C) Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n i niepusty zbiór otwarty V w X taki, że $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ dla $x \in V$ i $m > n$.

Wskazówka. Korzystając z (B) wybrać $a \in X$ i $r > 0$ takie, że $|f(a) - f(x)| < \varepsilon/3$ dla $x \in B(a, r)$. Założyć, że teza nie jest prawdziwa i wybrać ciąg kul $B(a, r/2) \supset B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2) \supset \ldots$, oraz indeksów $n_1 < n_2 < \ldots$ takich, że $|f(a_i) - f_{n_i}(a_i)| \geqslant \varepsilon$, $|f_{n_i}(a_i) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon/3$ dla $x \in B(a_i, r_i)$, oraz $r_i \to 0$.

16 Pokazać, że w Zadaniu 15 (B) i (C) założenie zupełności (X, d) jest istotne.

Wskazówka. Przyjąć jako (X, d) przestrzeń liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ z metryką euklidesową. Rozpatrując (C), ustawić liczby wymierne w ciąg $q_1, q_2, \ldots$, ustalić bazę $B_1, B_2, \ldots$ w przestrzeni $\mathbb{Q}$ i określić funkcje ciągłe $f_n : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$ tak, aby $f_n(q_i) = 0$ oraz $f_n^{-1}(1) \cap B_i \neq \emptyset$ dla $i \leqslant n$.

17 . Wykazać, że zbiór funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, które nie są monotoniczne na żadnym nietrywialnym przedziale jest gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych $(C[0,1], d_{sup})$.

Wskazówka. Ustawić wszystkie nietrywialne przedziały w $\mathbb{R}$ o końcach wymiernych w ciąg $I_1, I_2, \ldots$ i wykazać, że zbiór M_n funkcji ciągłych na $[0,1]$, które są albo niemalejące, albo nierosnące na I_n, jest domknięty i ma puste wnętrze w przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$.

18 Mówimy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny, jeśli istnieje metryka d generująca topologię $\mathcal{T}$ taka, że przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna.

(A) Zauważyć, że przestrzeń X jest metryzowalna w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna z przestrzenią metryczną zupełną.

(B) Wykazać, że przestrzeń liczb wymiernych z topologią euklidesową nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

(C) Wykazać, że jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny i A jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T})$, to podprzestrzeń $(A, \mathcal{T}_A)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny.

(D) Które z następujących podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej są metryzowalne w sposób zupełny?

a) $X_1 = Q \times R$, gdzie Q oznacza zbiór liczb wymiernych,
b) $X_2 = Q \times (R \setminus Q)$,
c) $X_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{1/n\} \times [0, 1/n])$,
d) $X_4 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \neq 0\}$,
e) $X_5 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,
f) $X_6 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in Q\}$.

(E) Wykazać, że jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny i U jest zbiorem otwartym w $(X, \mathcal{T})$, to podprzestrzeń $(U, \mathcal{T}|U)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny.

Wskazówka. Niech d będzie metryką na X taką, że (X,d) jest zupełna, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ i niech $d_{X\setminus U}(x) = \inf\{d(x,y) : y \in X \setminus U\}$. Pokazać, że funkcja $h : U \to X \times \mathbb{R}$, $h(x) = \left(x, \frac{1}{d_{X\setminus U}(x)}\right)$ jest homeomorfizmem $(U, \mathcal{T}|U)$ na podprzestrzeń domkniętą $h(U)$ iloczynu $X \times \mathbb{R}$.

(F) Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny i niech $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, gdzie $U_n \in \mathcal{T}$. Pokazać, że przestrzeń $(G, \mathcal{T}|G)$ jest metryzowalna w sposób zupełny.

Wskazówka. Określić homeomorfizm przestrzeni $(G, \mathcal{T}|G)$ na podprzestrzeń domkniętą iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $(U_n, \mathcal{T}|U_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ i skorzystać z (E) i Zad. 6 (B).